Teknikom : Vol. 2 No. 1 (2018)
ISSN : 2598-294X (print)
ISSN : 2598-2958(online)

Estimasi Parameter Model Fungsi Gaji Berdasarkan Masa Kerja Menggunakan Algoritma *Levenberg-Marquardt* pada Program Matlab

Atika Ratna Dewi[1], Sulistyasni[2], Dewi Erla Mahmudah[3], Riana Safitri[4]
[1,2,3,4] STMIK Widya Utama
[1]atika.ratnadewi87@gmail.com, [2]sulistiyasnipwt@yahoo.co.id, [3]dewierla@swu.ac.id,
[4]rianasafitri07@gmail.com

Abstract— *The calculation of pension funding program needs an assumption which can be used to predict the amount of salary when somebody is retired. This is commonly called salary function. A salary function was influenced by some factors such as inflation and merit. This study discussed the declining of salary function model based on exponential function. The salary function model was based on years of service (service-based model). This model had been estimated using Levenberg Marquardt method on MATLAB program. After that, the model had been used to calculate the amount of salary on pension funding program.*

Keywords—Salary function, Service-based model, Levenberg-Marquardt, Nonlinear function.

1. Pendahuluan

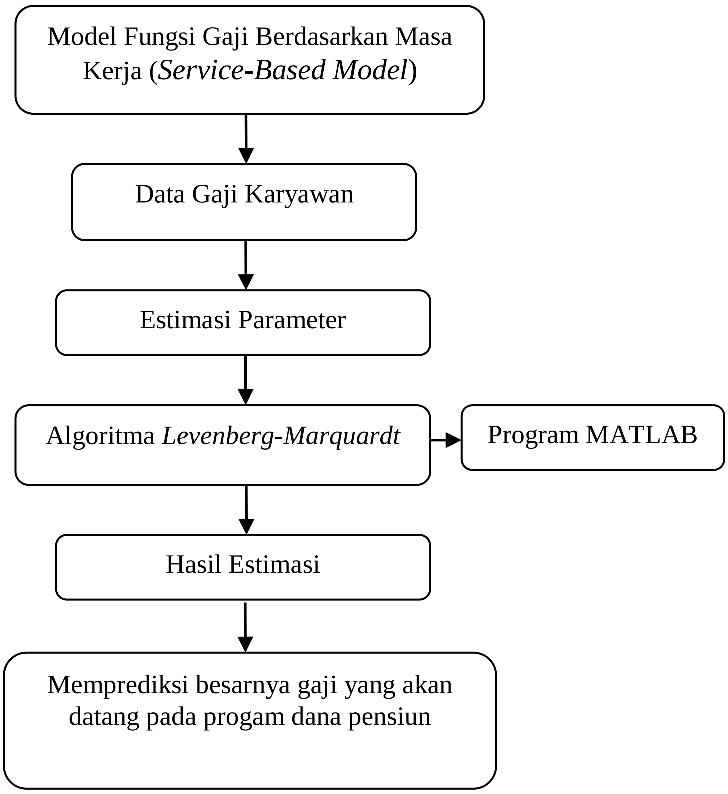
Program dana pensiun merupakan suatu sistem yang menyediakan uang atau dana untuk pegawai atau karyawan ketika mereka sudah pensiun. Faktor-faktor yang menyebabkan seorang pegawai atau karyawan memasuki masa pensiun, yaitu karena berhenti/keluar dari pekerjaan (*withdrawal*), cacat (*disability*), pensiun normal (*normal retirement*) dan kematian (*mortality*). Dalam program dana pensiun sangat dibutuhkan suatu asumsi yang dapat digunakan untuk memprediksi suatu besarnya gaji pada saat pensiun, yang biasa disebut fungsi gaji (*salary function*). Fungsi gaji dipengaruhi oleh beberapa faktor antara lain inflasi dan merit (*seniority*). Dalam penelitian ini akan dibahas penurunan model fungsi gaji yang berbentuk fungsi eksponensial, dimana model fungsi gaji tersebut berdasarkan masa kerja (*service-based model*). Model nonlinear tersebut diestimasi menggunakan metode *Levenberg Marquardt* pada software MATLAB. Selanjutnya, hasil estimasi dari model yang diperoleh akan digunakan untuk perhitungan besarnya gaji seseorang di masa yang akan datang pada program dana pensiun.

2. Metode Penelitian

Penelitian tentang model fungsi gaji ini dilakukan dengan studi kepustakaan. Penelitian ini dimulai dengan membentuk suatu model fungsi gaji eksponensial *service based model* (berdasarkan masa kerja). Model nonlinear tersebut diestimasi menggunakan metode *Levenberg Marquardt* pada *software* MATLAB. Selanjutnya, hasil estimasi dari model yang diperoleh akan digunakan untuk perhitungan besarnya gaji seseorang di masa yang akan datang pada program dana pensiun. Bagian terakhir dari penelitian ini adalah membuat contoh kasus dengan menggunakan data karyawan dalam suatu instansi.

Kerangka Pemikiran Teoritis

Melalui analisis terhadap penelitian– penelitian terdahulu maka dapat digambarkan sebuah kerangka berfikir seperti yang disajikan dalam gambar 1. sebagai berikut :



Gambar 1 Kerangka Pemikiran Teoritis

ISSN : 2598-294X (print)
ISSN : 2598-2958(online)

2.1 *Program Dana Pensiun [1]*

Program dana pensiun merupakan suatu sistem yang menyediakan uang atau dana untuk pegawai atau karyawan ketika mereka sudah pensiun. Program dana pensiun ditujukan untuk karyawan yang pada suatu saat memasuki masa pensiun. Program dana pensiun dimaksudkan untuk memberikan penghasilan yang berkesinambungan dan sebagai salah satu alternatif untuk memberikan jaminan kesejahteraan kepada karyawan setelah pensiun. Penghasilan ini berupa manfaat pensiun (*Benefit*) berdasarkan ketentuan yang berlaku dalam dana pensiun. Berikut jenis-jenis program dana pensiun :

1. Program Pensiun Iuran Pasti (*Defined Contribution Plans*)
   Merupakan program pensiun yang iurannya ditetapkan dalam peraturan dana pensiun dan seluruh iuran serta hasil pengembangannya dibukukan pada rekening masing-masing peserta sebagai manfaat pensiun .
2. Program Pensiun Manfaat Pasti (*Defined Benefit Plans*)
   Merupakan program pensiun yang memberikan formula tertentu atas manfaat pensiun yang akan diterima karyawan pada saat mencapai usia pensiun berdasarkan peraturan dana pensiun. Manfaat pensiun ini ditentukan dengan cara formula atau rumus yang bergantung dari masa kerja dan besarnya gaji.

2.2 Metode Nonlinear Least Square (NLS) [2]

Regresi nonlinear adalah suatu analisis regresi dimana data penelitian digambarkan oleh suatu fungsi yang merupakan kombinasi non linear dari parameter-parameter dan tergantung pada satu atau lebih variabel independen. Bentuk umum dari model statistik nonlinear adalah

$$y = f(X,\beta) + e, \tag{2.1}$$

dengan fungsi nonlinear dalam parameter β dan $e \sim N(0,\sigma^2 I_T)$. Ada 2 cara untuk menaksir β pada model statistik nonlinier yaitu dengan metode *nonlinear least square* dan *maximum likelihood.* Kedua metode tersebut menghasilkan penaksiran β yaitu:

$$\hat{\beta} = f(X,\beta) + e. \tag{2.2}$$

2.3 *Metode Levenberg-Marquardt [3]*

Metode *Levenberg-Marquardt* merupakan gabungan antara iterasi *Gauss-Newton* dan iterasi *Steepest Descent*. Metode *Levenberg-Marquardt* menggunakan metode iterasi seperti iterasi *Gauss-Newton* yaitu menggunakan *first order condition* (FOC) dari *sum of least square error*. Perbedaannya adalah ada penambahan perkalian skalar dan matriks identitas μI_K pada iterasi *Levenberg-Marquardt*. Selain itu, penentuan panjang langkah atau *step length* (t_n) dalam iterasi *Levenberg-Marquardt* dapat bervariasi. Aproksimasi $y = f(X,\beta)$ di sekitar *initial value* $\beta^{(1)}$ dilakukan dengan deret *Taylor* orde 1, yaitu

$$\begin{aligned} f(X,\beta) &= \;\text{--}\big(X,\beta^{(1)}\big) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta'}\Big|_{\beta^{(1)}}\big(\beta-\beta^{(1)}\big) \\ &= f\big(X,\beta^{(1)}\big) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta'}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta'}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Misalkan $\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta'}\Big|_{\beta^{(1)}} = Z\big(\beta^{(1)}\big)$. Maka:

$$\begin{aligned} y &= f(X,\beta) + e \\ &= f\big(D,\beta^{(1)}\big) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta'}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial\beta'}\Big|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)} \\ &= f\big(X,\beta^{(1)}\big) + Z\big(\beta^{(1)}\big)\beta - Z\big(\beta^{(1)}\big)\beta^{(1)} + e \end{aligned} \tag{2.4}$$

atau

$$\begin{aligned} y - f\big(X,\beta^{(1)}\big) + Z\big(\beta^{(1)}\big)\beta^{(1)} &= Z\big(\beta^{(1)}\big)\beta + e \\ \bar{y}\big(\beta^{(1)}\big) &= Z\big(\beta^{(1)}\big)\beta + e \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sehingga dapat ditaksir β dengan menggunakan metode *least square*, diperoleh

$$\begin{aligned} \beta^{(2)} &= \Big(Z\big(\beta^{(1)}\big)'Z\big(\beta^{(1)}\big)\Big)^{-1} Z\big(\beta^{(1)}\big)'\bar{y}\big(\beta^{(1)}\big) \\ &= \Big(Z\big(\beta^{(1)}\big)'Z\big(\beta^{(1)}\big)\Big)^{-1} Z\big(\beta^{(1)}\big)' \Big(y - f\big(X,\beta^{(1)}\big) + Z\big(\beta^{(1)}\big)\beta^{(1)}\Big) \\ &= \beta^{(1)} + \Big(Z\big(\beta^{(1)}\big)'Z\big(\beta^{(1)}\big)\Big)^{-1} Z\big(\beta^{(1)}\big)'\Big(y - f\big(X,\beta^{(1)}\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sehingga secara umum diperoleh iterasi sebagai berikut :

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \Big(Z\big(\beta^{(n)}\big)'Z\big(\beta^{(n)}\big)\Big)^{-1} Z\big(\beta^{(n)}\big)'\Big(y - f\big(X,\beta^{(n)}\big)\Big) \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) disebut sebagai persamaan iterasi *Gauss-Newton*, sedangkan persamaan iterasi *Levenberg-Marquardt* adalah persamaan yang diperoleh dengan cara memodifikasi persamaan (2.7) menjadi :

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \Big(Z\big(\beta^{(n)}\big)'Z\big(\beta^{(n)}\big) + \mu I\Big)^{-1} Z\big(\beta^{(n)}\big)'^{\left(y - f\left(X,\beta^{(n)}\right)\right)} \tag{2.8}$$

ISSN : 2598-294X (print)
ISSN : 2598-2958(online)

Persamaan (2.8) disebut sebagai iterasi *Levenberg-Marquardt*, dimana μ adalah *damping parameter* yang nilainya tidak boleh negatif dan biasanya nilai μ merupakan faktor dari 10. Sedangkan I adalah matriks identitas. Iterasi *Levenberg-Marquardt* akan berhenti pada saat nilai iterasi tersebut konvergen yaitu jika memenuhi :

$$||\beta^{n+1} - \beta^{n}|| \leq \varepsilon$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Fungsi Gaji (Salary function) [4]

Menurut Bowers dkk. (1997) fungsi gaji dalam *Actuarial Mathematics* bertujuan untuk mengestimasi gaji yang akan datang dalam program pensiun. Fungsi gaji dinotasikan dengan S_x dengan x merupakan usia seorang pegawai dalam program pensiun. Secara umum S_x merupakan fungsi tidak menurun (*nondecreasing function*) dalam x yang menggambarkan kenaikan gaji, serta berkaitan dengan inflasi dan merit (*seniority*). Jika AS_x merupakan gaji sesungguhnya dari seorang pegawai yang berusia x maka estimasi gaji yang akan datang pada usia $y > x$ adalah

$$AS_y = AS_x \times \frac{S_y}{S_x}, \tag{3.1}$$

dimana $\frac{S_y}{S_x}$ merupakan skala gaji. Menurut Carrier dan Shand (1997) jika fungsi gaji merupakan fungsi akumulasi dari faktor inflasi dan merit maka dapat diekspresikan sebagai fungsi eksponensial :

$$S_x = \exp\left\{\int_0^x (\xi + \psi_z) dz\right\} \tag{3.3}$$

dengan :
ξ = tingkat inflasi (konstan),
ψ_z = tingkat kenaikan gaji karena usia.

Persamaan fungsi gaji untuk orang yang berusia x yaitu

$$S_x = \exp\left\{\xi x + \int_0^x \psi_z dz\right\}, \tag{3.4}$$

dan estimasi gaji yang akan datang $y > x$ adalah

$$\frac{S_y}{S_x} = \exp\left\{\xi(y - x) + \int_x^y \psi_z dz\right\}, \tag{3.5}$$

dengan
$\exp\{\xi(y - x)\}$ = fungsi inflasi,
$\exp\{\int_x^y \psi_z dz\}$ = fungsi merit (fungsi karena jasa).

Asumsi yang digunakan pada kasus ini adalah $\psi_z = \beta e^{-\lambda z}, \beta > 0, \lambda < 0$, sehingga diperoleh model fungsi gaji untuk seorang pegawai yang berusia x adalah

$$S_x = \exp\{\xi x + \beta\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda x})\}. \tag{3.6}$$

Misalkan N_x merupakan jumlah orang yang berusia x pada waktu $t = 0$. Jumlah tersebut akan sama dengan jumlah orang yang berusia $x + 1$ pada waktu $t = 1$, karena data yang diobservasi untuk orang yang sama dan masih hidup selama masa studi. Misalkan $AS^k_{[x]+t}, k = 1,2, \dots, N_x$ merupakan gaji untuk pegawai k pada usia $x + t$. Jika s_k merupakan jumlah masa kerja pada waktu $t = 0$ sehingga diperoleh $AS_{[x]-s_k}$ yang merupakan gaji pada saat masuk kerja. Jadi model perkembangan gaji yang realistis adalah

$$AS^k_{[x]+t} = AS^k_{[x]-s_x} \times \exp\left\{\int_{-s_k}^{t} \xi_z dz + \int_{x-s_k}^{x+t} \psi_z dz\right\} \times \varepsilon^k_t, \tag{3.7}$$

dengan
$\exp \int_{-s_k}^{t} \xi_z dz$ = faktor inflasi,
$\exp \int_{x-s_k}^{x+t} \psi_z dz$ = faktor merit,
ε^k_t = eror.

Berdasarkan persamaan (3.7) diperoleh persamaan (3.8) berikut ini

$$AS^k_{[x]+t+1} = AS^k_{[x]+t} \times \exp\left\{\int_t^{t+1} \xi_z dz + \int_{x+t}^{x+t+1} \psi_z dz\right\} \times \frac{\varepsilon^k_{t+1}}{\varepsilon^k_t}. \tag{3.8}$$

3.1.2 Service-Based Model

Subbab ini akan menyajikan model fungsi gaji berdasarkan masa kerja *(service-based model)*, yang dinotasikan sebagai $S_s, s \geq 0$. S_s merupakan fungsi yang tidak menurun dimana s menggambarkan kenaikan gaji karena inflasi dan merit (*seniority*). Jika AS_s merupakan gaji dari seorang pegawai dengan masa kerja s maka estimasi gaji yang akan datang pada usia $t > s$ adalah

$$AS_t = AS_s \times \frac{S_t}{S_s}$$

Selanjutnya persamaan fungsi gaji untuk *service-based model* adalah

$$S_s = \exp\left\{\int_0^s (\xi + \psi_z) dz\right\}, \tag{3.9}$$

dengan
ξ = tingkat inflasi (konstan),
ψ_z = tingkat kenaikan masa kerja.

Asumsi yang digunakan pada kasus ini adalah $\square_{\xi} e_z = \beta e^{-\lambda z}, \beta > 0, \lambda < 0,$ sehingga diperoleh model fungsi gaji untuk seorang pegawai dengan masa kerja s adalah

$$S_s = \exp\{\xi s + \beta\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda s})\}. \tag{3.10}$$

Berdasarkan persamaan (3.10) maka dapat didefinisikan persamaan-persamaan berikut

$$Y^k_t = \log_e\left[\frac{AS^k_{[s_k]+t+1}}{AS^k_{[s_k]+t}}\right],$$

$$\varepsilon^k_t = \log_e\left[\frac{\varepsilon^k_{t+1}}{\varepsilon^k_t}\right],$$

ISSN : 2598-294X (print)
ISSN : 2598-2958(online)

$$\xi_t = \int_t^{t+1} \xi_z dz. \quad (3.11)$$

Berdasarkan persamaan (3.11) maka dapat dibentuk persamaan nonlinear berikut :

$$Y_t^k = \xi_t + be^{-\lambda(s_k+t)} + \varepsilon_t^k, \quad (3.12)$$

untuk $t = 0{,}1$ dan $k = 1{,}2, \dots, N$.

Selanjutnya persamaan regresi nonlinear (3.12) diestimasi dengan menggunakan metode *Levenberg-Marquardt.*

Service-Based Model

Model fungsi gaji berdasarkan masa kerja (*service-based model*) yang diperoleh adalah

$$Y_t^k = \xi_t + be^{-\lambda(s_k+t)} + \varepsilon_t^k \quad (3.13)$$

dimana

ξ_t = tingkat inflasi

$be^{-\lambda(s_k+t)}$ = faktor merit

Dengan menggunakan metode *Levenberg-Marquardt* diperoleh hasil estimasi parameter model fungsi gaji berdasarkan masa kerja (*service-based model*), yaitu

Tabel 1 Hasil estimasi parameter *Service-Based Model*

t	**0**	**1**
$\hat{\xi}$	0,0480	0,0590
$\hat{b}$	0,0004	0,0004
$\hat{\lambda}$	-0,0346	-0,0394
AIC	60,4021	61,2122
SC	67,1474	67,9577

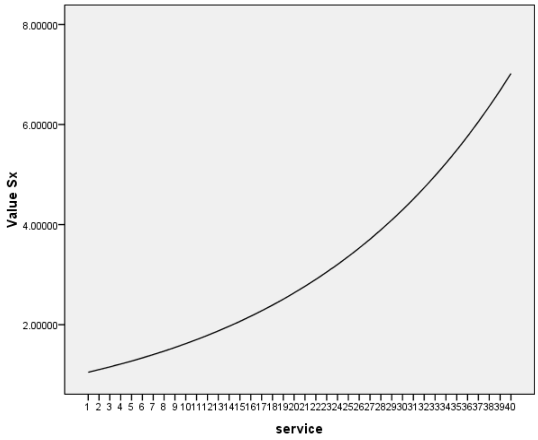
Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa parameter dengan AIC dan SC terkecil yaitu pada saat $t = 0$. Sehingga diperoleh model fungsi gaji *service-based model* yaitu :

$$S_s = \exp\{0{,}0480s + (0{,}000393)(-0{,}0346)^{-1}(1 - e^{-(-0{,}0346)s})\}. \quad (3.14)$$

Berdasarkan persamaan (3.14) maka diperoleh fungsi gaji *service-based model* yang disajikan dalam Tabel 2 berikut:

Tabel 2 Fungsi gaji *Service-Based Model*

s	Ss	Ss/S1	s	Ss	Ss/S1
1	1.04959	1	21	2.77357	2.64252
2	1.10166	1.04961	22	2.91236	2.77475
3	1.15632	1.10169	23	3.05818	2.91368
4	1.21372	1.15637	24	3.21139	3.05966
5	1.27398	1.21379	25	3.37239	3.21306
6	1.33726	1.27408	26	3.54158	3.37425
7	1.4037	1.33738	27	3.71938	3.54365
8	1.47347	1.40386	28	3.90624	3.72168
9	1.54674	1.47366	29	4.10263	3.90879
10	1.62368	1.54697	30	4.30906	4.10547
11	1.70448	1.62395	31	4.52604	4.3122
12	1.78934	1.7048	32	4.75415	4.52953
13	1.87846	1.78971	33	4.99395	4.758
14	1.97206	1.87889	34	5.24608	4.99822
15	2.07038	1.97256	35	5.51118	5.25079
16	2.17364	2.07094	36	5.78993	5.51637
17	2.2821	2.17428	37	6.08308	5.79567
18	2.39604	2.28284	38	6.39138	6.0894
19	2.51573	2.39687	39	6.71564	6.39834
20	2.64147	2.51667	40	7.05673	6.72332



Gambar 2 Plot fungsi gaji *Service-Based Model*

4. KESIMPULAN

1. Model fungsi gaji berdasarkan masa kerja (*service-based model*), yaitu
$$S_s = \exp\left\{\xi s + \int_0^s \psi_z dz\right\}.$$
2. Estimasi parameter dari model fungsi gaji yang diperoleh dengan menggunakan metode *Levenberg-Marquardt* adalah

Tabel 3 Estimasi parameter model fungsi gaji

Model	***Service-Based Model***	
t	**0**	**1**
$\hat{\xi}$	0,0480	0,0590
$\hat{b}$	0,0004	0,0004
$\hat{\lambda}$	-0,0346	-0,0394

Sehingga diperoleh model fungsi gaji *service-based model* yaitu :

$$S_s = \exp\{0{,}0480s + (0{,}000393)(-0{,}0346)^{-1}(1 - e^{-(-0{,}0346)s})\}.$$

ISSN : 2598-294X (print)
ISSN : 2598-2958(online)

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.U., Jones, D.A. and Nesbitt, C.J., 1997, *Actuarial Mathematics*, Second Edition, The Society of Actuaries, Schaumburg.

[2] Griva, I., Nash, S.G. and Sofer, A., 2009, *Linear and Nonlinear Optimization*, Second Edition, The Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

[3] Marquardt, D., 1963, *An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameter*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 2, 11, 431-441.

[4] Carriere, J.F. and Shand, K.J., 1997, *New Salary Functions for Pension Valuations*, North American Actuarial Journal, 3, 2, 18-27.