

Penerapan Kontrol Pencegahan Kontak *Host-Vector* dan Pembasmian *Vector* pada Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah

Dewi Erla Mahmudah¹, Atika Ratna Dewi², Riana Safitri³

^{1,2,3}STMIK Widya Utama

¹dewierla@swu.ac.id, ²atika.ratnadewi87@gmail.com, ³rianasafitri07@gmail.com

Abstract— In this paper we discuss an existing dengue disease model with preventive control to minimize the contact between host and vector. The model is further developed involving the insecticide control to the vector. The aim is to obtain an optimal preventive strategies with minimal cost. We present the optimal control via the Pontryagin Minimum Principle. The obtained optimality system is derived by Hamiltonian function.

Keywords— Optimal Control, Insecticide Control, Dengue Disease Model, Pontryagin Minimum Principle, Hamiltonian

1. PENDAHULUAN

Penyebaran penyakit masih menjadi permasalahan yang serius untuk segera ditemukan penyelesaian dan pencegahannya, khususnya penyakit demam berdarah. Penyebaran penyakit demam berdarah dimodelkan dengan penyebaran penyakit *host-vector*, dengan manusia merupakan kategori populasi *host*, dan nyamuk *Aedes aegypti* sebagai *vector* yang merupakan pembawa virus demam berdarah [1].

Penelitian tentang penyebaran penyakit demam berdarah telah banyak dilakukan, seperti pemberian asumsi adanya imunitas setelah penyembuhan yang dikenakan pada model *host-vector* [2]. Berbeda dengan hal tersebut, manusia dapat terjangkit penyakit demam berdarah kembali dengan mempertimbangan adanya beberapa *serotype* [3].

Pencegahan penyebaran penyakit melalui kontrol optimal telah banyak diteliti, seperti penelitian kontrol optimal pada model penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol insektisida [4], dan penyembuhan secara kimiawi [5]. Kontrol optimal penting dilakukan dengan mempertimbangkan strategi-strategi yang diimplementasikan pada model. Tidak hanya pada model penyebaran penyakit saja [6], kontrol optimal dapat memberikan gambaran solusi pada penyebaran virus komputer [7], dan jaringan komputer [8], bahkan pada model penyebaran *zombie* [9].

Sari dkk [1] mengenalkan perluasan model penyebaran penyakit demam berdarah dengan mempertimbangkan

asumsi bahwa populasi *host* dapat menjadi *susceptible* setelah adanya penyembuhan, dan adanya beberapa populasi *host* yang terinfeksi yang tidak dapat menyebarkan penyakit demam berdarah. Kemudian model tersebut dikenakan variabel kontrol pencegahan kontak antara *host-vector* (u_1), dimana $0 \leq u_1 \leq 1$ sebagai berikut:

$$\frac{dS_H(t)}{dt} = \mu_H N_H - (1 - u_1) \frac{\beta_H b S_H I_V}{N_H} - \mu_H S_H + \alpha R_H \quad (1.a)$$

$$\frac{dI_H(t)}{dt} = (1 - u_1) \frac{\beta_H b S_H I_V}{N_H} - \mu_H I_H - \gamma_H I_H \quad (1.b)$$

$$\frac{dR_H(t)}{dt} = \gamma_H I_H - \mu_H R_H - \alpha R_H \quad (1.c)$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = A - (1 - u_1) \frac{\beta_V b S_V (1 - \varepsilon) I_H}{N_H} - \mu_V S_V \quad (1.d)$$

$$\frac{dI_V(t)}{dt} = (1 - u_1) \frac{\beta_V b S_V (1 - \varepsilon) I_H}{N_H} - \mu_V I_V \quad (1.e)$$

Dimana $S_H + I_H + R_H = N_H$ dan $S_V + I_V = N_V$. Diasumsikan bahwa $S_H(t)$ merepresentasikan populasi *susceptible host* pada waktu t , $I_H(t)$ merepresentasikan populasi *infectious host* pada waktu t , $R_H(t)$ merepresentasikan populasi *recoverable (immune) host* pada waktu t , $S_V(t)$ merepresentasikan populasi *susceptible vector* pada waktu t , $I_V(t)$ merepresentasikan populasi *infectious vector* pada waktu t , N_H merupakan total populasi *host*, dan N_V merupakan total populasi *vector*.

Tingkat kelahiran dan kematian pada populasi *host* diasumsikan sama, yaitu μ_H . Jika b merupakan jumlah gigitan nyamuk per hari, maka untuk setiap populasi nyamuk (N_V) terdapat bN_V gigitan nyamuk per hari. Dapat diartikan bahwa populasi *host* akan menerima sebanyak $\frac{bN_V}{N_H} I_V$ gigitan nyamuk terinfeksi per hari. Jika β_H merupakan tingkat penyebaran dari nyamuk ke populasi *host*, maka tingkat terinfeksi nya populasi *susceptible host* didefinisikan sebagai $\beta_H \frac{bN_V}{N_H} I_V$ atau $\beta_H \frac{bI_V}{N_H}$. Diasumsikan bahwa populasi *recoverable host* dapat menjadi *susceptible host*, yang dinotasikan

dengan α . Tingkat pemulihan *host* dinotasikan dengan γ_H .

Tingkat pertumbuhan populasi *vector* dinotasikan dengan A , dan tingkat kematian populasi *vector* dinotasikan dengan μ_V . Diasumsikan bahwa β_V merupakan tingkat transmisi dari populasi *host* ke populasi *vector* sehingga $\beta_V \frac{b}{N_H} I_H$. Asumsi bahwa populasi *host* yang terinfeksi tidak dapat menyebarkan penyakit demam berdarah dinotasikan dengan ε , sehingga $(1 - \varepsilon)$ merupakan populasi *host* yang terinfeksi yang dapat menyebarkan penyakit demam berdarah dan tingkat infeksi dinotasikan sebagai $\beta_V \frac{b}{N_H} (1 - \varepsilon) I_H$.

2. METODE PENELITIAN

Langkah-langkah dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal adalah:

1. Mengkonstruksi model penyebaran penyakit demam berdarah yang dikenai variabel kontrol.
2. Menentukan kontrol optimal.
Penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin sebagai berikut:
 - a. Membentuk fungsi Hamilton

$$H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t)) = f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \lambda(t)g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)).$$
 - b. Menyelesaikan

$$\frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))}{\partial \mathbf{u}} = 0$$
 untuk mendapatkan

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t), \lambda(t)).$$
 - c. Mengamati

$$H^*(t, \mathbf{x}(t), \lambda(t)) = H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}(t), \lambda(t)), \lambda(t)) = \min_{\mathbf{u} \in U} H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))$$
 - d. Menyelesaikan persamaan *state*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))}{\partial \lambda}$$
 dan persamaan *costate*

$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))}{\partial \mathbf{x}}$$
 dengan kondisi transversal $\lambda(t) = 0$.
 - e. Mensubstitusikan hasil dari langkah d. ke $\mathbf{u}^*$ untuk menentukan kontrol optimal [10].

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))}{\partial \lambda}$$

dan persamaan *costate*

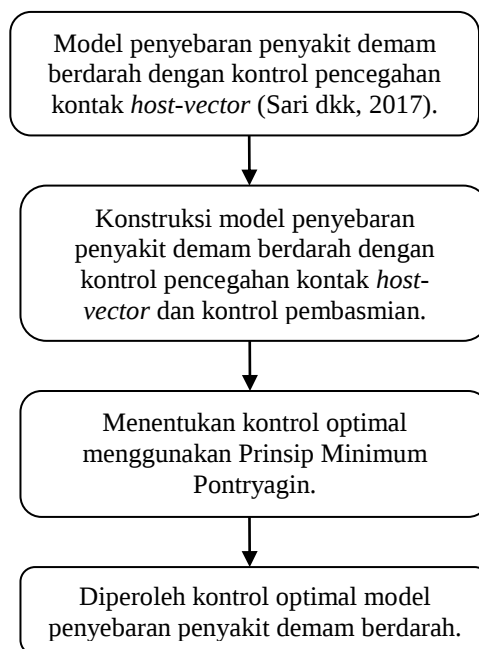
$$\dot{\lambda}(t) = - \frac{\partial H(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t))}{\partial \mathbf{x}}$$

dengan kondisi transversal $\lambda(t) = 0$.

- e. Mensubstitusikan hasil dari langkah d. ke $\mathbf{u}^*$ untuk menentukan kontrol optimal [10].

Kerangka Pemikiran Teoritis

Melalui analisis terhadap penelitian-penelitian terdahulu maka dapat digambarkan sebuah kerangka berfikir seperti yang disajikan dalam gambar 1. sebagai berikut :



Gambar 1. Kerangka Pemikiran Teoritis

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model

Pada tahap ini, konstruksi model dilakukan sebagai pengembangan dari model (Sari dkk, 2017). Pada penelitian ini, diterapkan kontrol tambahan yaitu kontrol yang diterapkan pada populasi *vector* (u_2) dengan $0 \leq u_2 \leq 1$, sehingga model penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol pencegahan kontak *host-vector* dan pembasmian *vector* (dengan variabel yang telah dinormalisasi) adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS_H(t)}{dt} = \mu_H - (1 - u_1)m\beta_H b S_H I_V - \mu_H S_H + \alpha R_H \quad (2.a)$$

$$\frac{dI_H(t)}{dt} = (1 - u_1)m\beta_H b S_H I_V - \mu_H I_H - \gamma_H I_H \quad (2.b)$$

$$\frac{dR_H(t)}{dt} = \gamma_H I_H - \mu_H R_H - \alpha R_H \quad (2.c)$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = \mu_V - (1 - u_1)\beta_V b S_V (1 - \varepsilon) I_H - \mu_V S_V - c u_2 S_V \quad (2.d)$$

$$\frac{dI_V(t)}{dt} = (1 - u_1)\beta_V b S_V (1 - \varepsilon) I_H - \mu_V I_V - c u_2 I_V \quad (2.e)$$

dimana $\alpha, \beta_H, \mu_H, \mu_V, \gamma_H, \varepsilon, b, c, m$ adalah konstan positif.

3.2 Permasalahan Kontrol Optimal

Permasalahan kontrol optimal adalah dengan meminimalkan fungsi objektif berikut:

$$J = (u_1, u_2) = \int_0^T (B I_H(t) + C u_1^2(t) + D u_2^2(t)) dt \quad (3)$$

Dengan kendala sistem persamaan (2.a-2.e), dengan B, C, D adalah faktor biaya, dengan $t \in [0, T]$. Tujuan penyelesaian ini adalah untuk meminimalkan jumlah

populasi *host* yang terinfeksi sekaligus meminimalkan biaya penerapan kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$.

Selanjutnya ditentukan pasangan kontrol optimal u_1^* dan u_2^* sehingga

$$J = (u_1^*, u_2^*) = \min\{J(u_1, u_2) | u_1, u_2 \in U\}, \quad (4)$$

dimana $U = \{(u_1, u_2) | u_i: [0, T] \rightarrow [0, 1], i = 1, 2\}$ adalah himpunan kontrol.

Penyelesaian permasalahan kontrol optimal menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Prinsip ini mengubah persamaan (2), (3), dan (4) ke dalam fungsi Hamiltonian (H), yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H = & B I_H(t) + C u_1^2(t) + D u_2^2(t) + \lambda_{S_H}(\mu_H - (1 - u_1)m\beta_H b S_H I_V - \mu_H S_H + \alpha R_H) \\ & + \lambda_{I_H}((1 - u_1)m\beta_H b S_H I_V - \mu_H I_H - \gamma_H I_H) + \lambda_{R_H}(\gamma_H I_H - \mu_H R_H - \alpha R_H) \\ & + \lambda_{S_V}(\mu_V - (1 - u_1)\beta_V b S_V(1 - \varepsilon) I_H - \mu_V S_V - c u_2 S_V) \\ & + \lambda_{I_V}((1 - u_1)\beta_V b S_V(1 - \varepsilon) I_H - \mu_V I_V - c u_2 I_V) \end{aligned}$$

dimana

$$\lambda_{S_H} = \lambda_{S_H}(t), \lambda_{I_H} = \lambda_{I_H}(t), \lambda_{R_H} = \lambda_{R_H}(t), \lambda_{S_V} = \lambda_{S_V}(t),$$

dan $\lambda_{I_V} = \lambda_{I_V}(t)$ adalah variabel *costate*.

Teorema 1. Diberikan kontrol optimal u_1^*, u_2^* dan solusi optimal $S_H^*, I_H^*, R_H^*, S_V^*, I_V^*$ dari sistem state (2) yang meminimumkan fungsi objektif $J(u_1, u_2)$ sehingga terdapat variabel *costate* $\lambda_{S_H}, \lambda_{I_H}, \lambda_{R_H}, \lambda_{S_V}, \lambda_{I_V}$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{S_H}}{dt} &= ((1 - u_1)m\beta_H b I_V - \mu_H)\lambda_{S_H} - ((1 - u_1)m\beta_H b I_V)\lambda_{I_H} \\ \frac{d\lambda_{I_H}}{dt} &= -B + (\mu_H + \gamma_H)\lambda_{I_H} - \gamma_H\lambda_{R_H} + ((1 - u_1)\beta_V b S_V(1 - \varepsilon))\lambda_{S_V} - (1 - u_1)\beta_V b S_V(1 - \varepsilon)\lambda_{I_V} \\ \frac{d\lambda_{R_H}}{dt} &= (\mu_H + \alpha)\lambda_{R_H} - \alpha\lambda_{S_H} \\ \frac{d\lambda_{S_V}}{dt} &= ((1 - u_1)\beta_V b(1 - \varepsilon)I_H + \mu_V + c u_2)\lambda_{S_V} - ((1 - u_1)\beta_V b(1 - \varepsilon)I_H)\lambda_{I_V} \\ \frac{d\lambda_{I_V}}{dt} &= ((1 - u_1)m\beta_H b S_H)\lambda_{S_H} - ((1 - u_1)m\beta_H b S_H)\lambda_{I_H} + (\mu_V + c u_2)\lambda_{I_V} \end{aligned}$$

Dengan kondisi transversal

$$\lambda_{S_H}(T) = \lambda_{I_H}(T) = \lambda_{R_H}(T) = \lambda_{S_V}(T) = \lambda_{I_V}(T) = 0$$

dan kontrol optimal u_1^* dan u_2^* memenuhi kondisi optimal

$$u_1^* = \min\{\max(0, \text{Solu}_1), 1\}$$

dan

$$u_2^* = \min\{\max(0, \text{Solu}_2), 1\}$$

dengan

$$\text{Solu}_1 = \frac{(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H})m\beta_H b S_H I_V + (\lambda_{I_V} - \lambda_{S_V})\beta_V b S_V(1 - \varepsilon)I_H}{2C}$$

dan

$$\text{Solu}_2 = \frac{c(S_V \lambda_{S_V} + I_V \lambda_{I_V})}{2D}.$$

Bukti. Eksistensi dari kontrol optimal dapat dibuktikan dengan menggunakan argumen yang sama dengan Teorema 1 dari [11]. Persamaan diferensial yang mengatur variabel *costate* ditentukan dengan turunan dari fungsi Hamiltonian untuk membentuk kontrol optimal. Selanjutnya sistem *costate* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{S_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dS_H} = ((1 - u_1)m\beta_H b I_V - \mu_H)\lambda_{S_H} - ((1 - u_1)m\beta_H b I_V)\lambda_{I_H} \\ \frac{d\lambda_{I_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dI_H} = -B + (\mu_H + \gamma_H)\lambda_{I_H} - \gamma_H\lambda_{R_H} + ((1 - u_1)\beta_V b S_V(1 - \varepsilon))\lambda_{S_V} - (1 - u_1)\beta_V b S_V(1 - \varepsilon)\lambda_{I_V} \\ \frac{d\lambda_{R_H}}{dt} &= -\frac{dH}{dR_H} = (\mu_H + \alpha)\lambda_{R_H} - \alpha\lambda_{S_H} \\ \frac{d\lambda_{S_V}}{dt} &= -\frac{dH}{dS_V} = ((1 - u_1)\beta_V b(1 - \varepsilon)I_H + \mu_V + c u_2)\lambda_{S_V} - ((1 - u_1)\beta_V b(1 - \varepsilon)I_H)\lambda_{I_V} \\ \frac{d\lambda_{I_V}}{dt} &= -\frac{dH}{dI_V} = ((1 - u_1)m\beta_H b S_H)\lambda_{S_H} - ((1 - u_1)m\beta_H b S_H)\lambda_{I_H} + (\mu_V + c u_2)\lambda_{I_V}, \end{aligned}$$

dengan kondisi transversal

$$\lambda_{S_H}(T) = \lambda_{I_H}(T) = \lambda_{R_H}(T) = \lambda_{S_V}(T) = \lambda_{I_V}(T) = 0.$$

Kondisi stasioner yang melibatkan himpunan kontrol, dapat diketahui bahwa

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial u_1} = 2C u_1^* + m\beta_H b S_H I_V \lambda_{S_H} - m\beta_H b S_H I_V \lambda_{I_H} + \beta_V b S_V(1 - \varepsilon)I_H \lambda_{S_V} - \beta_V b S_V(1 - \varepsilon)I_H \lambda_{I_V} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u_2} = 2D u_2^* - c S_V \lambda_{S_V} - c I_V \lambda_{I_V} \end{aligned}$$

kemudian ditentukan kontrol optimal

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H})m\beta_H b S_H I_V + (\lambda_{I_V} - \lambda_{S_V})\beta_V b S_V(1 - \varepsilon)I_H}{2C}, \\ \text{dan} \\ u_2^* &= \frac{c(S_V \lambda_{S_V} + I_V \lambda_{I_V})}{2D}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, kontrol optimal dari model penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol pencegahan kontak *host-vector* dan pembasmian *vector* adalah

$$u_1^* = \min\{\max(0, \text{Solu}_1), 1\}$$

dan

$$u_2^* = \min\{\max(0, \text{Solu}_2), 1\}$$

dengan

$$\text{Solu}_1 = \frac{(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H})m\beta_H b S_H I_V + (\lambda_{I_V} - \lambda_{S_V})\beta_V b S_V(1 - \varepsilon)I_H}{2C}$$

dan

$$\text{Solu}_2 = \frac{c(S_V \lambda_{S_V} + I_V \lambda_{I_V})}{2D}.$$

4. KESIMPULAN

Kontrol optimal u_1^* dan u_2^* pada model penyebaran penyakit demam berdarah dengan kontrol pencegahan kontak *host-vector* dan pembasmian *vector* diperoleh dengan mengimplementasikan Prinsip Minimum Pontryagin, dengan cara membentuk fungsi Hamiltonian (H) yang memenuhi kondisi optimal. Selanjutnya diharapkan kontrol optimal ini dapat meminimalkan populasi *host* yang terinfeksi sekaligus meminimalkan biaya penerapan kontrol.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan simulasi secara numerik dengan menggunakan *Forward-Backward Sweep Method* yang dikombinasikan dengan metode Runge Kutta orde 4.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Sari, E.R., Insani, N., dan Lestari, D., 2017, The Preventive Control of a Dengue Disease Using Pontryagin Minimum Principal, *Int. Conf. on Mathematics: Education, Theory and Application, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 855 (2017) 012045.
- [2] Esteve, L., dan Vargas, C., 1998, Analysis of a Dengue Disease Transmission Model, *Mathematical Biosciences*, 150, 131-151.
- [3] Soewono, E., dan Supriatna, A.K., 2001, A Two-dimensional Model for the Transmission of Dengue Fever Disease, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 24, 49-57.
- [4] Rodrigues, H.S., Monteiro, M.T.T., dan Torres, D.F.M., 2010, Insecticide Control in a Dengue Epidemics Model, *Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 1281, 979-982.
- [5] Dumont, Y., dan Chiroleu, F., 2010, Vector Control for the Chikungunya Disease, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 7, 313-345.
- [6] Mahmudah, D.E., Suryanto, A., dan Trisilowati, 2013, Optimal Control of a Vector-Host Epidemic Model with Direct Transmission, *Applied Mathematical Sciences*, 7, 99, 4919-4927.
- [7] Mahmudah, D.E., Naf'an, M.Z.N., Sofi'i, M., Purbasari, W., 2017, Kontrol Optimal Model Penyebaran Virus Komputer dengan Pengaruh Komputer Eksternal yang Terinfeksi dan *Removable Storage Media*, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*, 9, 1, 113-124.
- [8] Mahmudah, D.E., Naf'an, M.Z.N., Dewi, A.R., 2017, Implementasi Model Matematika pada Jaringan Komputer, *Prosiding Seminar Nasional Humaniora dan Teknologi*.
- [9] Mahmudah, D.E., Naf'an, M.Z.N., Dinnullah, R.N.I., 2017, Kontrol Optimal Model Epidemik Zombie, *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika*.
- [10] Gopal, M., 1985, *Modern Control System Theory*, Mohinder Singh Sejwal for Wiley Eastern Limited.
- [11] Augusto, F.B., 2013, Optimal Isolation Control Strategies and Cost-Effectiveness Analysis of a Two-Strain Avian Influenza Model, *Biosystems*, in press.